Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

## Complementi di Analisi Matematica I – Appello straordinario del 28/10/05

Studenti degli anni passati che devono: 1) sostenere *solo* Complementi I; 2) sostenere Complementi I e Analisi III **(entrambi con i vecchi programmi)** – tutte le lettere ossia Perfetti+Tarantello. Gli studenti che rientrano nel punto 2) precedente, all'atto di sostenere Analisi III, **non possono** sostenere l'esame di Analisi II–primii 5 crediti di Perfetti con il relativo programma ma devono portare il programma di Analisi III dello scorso anno

**Primo Esercizio** **(6)** Calcolare i seguenti integrali $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2+1}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a\sin t+a^2}$ $|a| \neq 1$

**Secondo Esercizio (10)** Sia data la funzione $\dfrac{z}{z^2-2z(1+i)+4i}$

1) Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor centrato in un generico punto $z_o$ in cui la funzione non è singolare e stabilire l'insieme di convergenza

2) Detti $c_k$ i coefficienti dello sviluppo si calcoli $c_3$ nel caso in cui $z_o = 1+i$

3) Detti $b_k$ i coefficienti dello sviluppo si calcoli $b_3$ nel caso di $z_o = 0$

4) Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent centrato nei punti di singolarità e stabilire l'insieme di convergenza

5) Detti $a_k$ i coefficienti dello sviluppo si calcoli $a_4$

**Terzo Esercizio** **(6)** Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + y = \delta(t-1) + \cos(t) \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$

**Quarto Esercizio** **(6)** Sia dato un filo disposto lungo la semiellisse $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$, $x \geq 0$ e lungo il segmento di equazioni $x = 0$, $-2 \leq y \leq 2$. Sulla semiellisse la densità del filo è $\delta(x,y) = |xy|$ mentre sul segmento è $\delta(x,y) = |y+1|$. Si calcoli l'ordinata del baricentro del filo.

**Quinto Esercizio (6)** Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = y^2 x\underline{i} + \underline{j} + xz\underline{k}$ uscente dalla superficie aperta data dal paraboloide $z = 1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2$, $z > 0$

**Sesto Esercizio** **(6)** È data la forma differenziale $\omega(x,y) = \dfrac{2x-3y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{3x+2y}{x^2+y^2}dy$. Spiegando brevemente i calcoli, si dica quanto valgono gli integrali curvilinei $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove $\gamma$, orientata in senso antiorario, è nell'ordine

$\gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$, $\gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1\}$,

$\gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ \dfrac{(x-3)^2}{4} + y^2 = 1\}$,